数理解析研究所講究録
378巻 1980年 61-66

On the Bernoulli numbers and the circular units of cyclotomic fields

佐賀大 理工　　上原 健

§1. pを奇素数，ζを1の原始p乗根とし正整数nに対してζ_nを$\zeta_n^p=\zeta_{n-1}$, $\zeta_0=\zeta$によって定義する。p分体$K=\mathbb{Q}(\zeta)$の有理数体$\mathbb{Q}$上のガロア群をGとする。$(a,p)=1$となる$a\in\mathbb{Z}$（有理整数環）に対して$\zeta^{\sigma_a}=\zeta^a$で定まるGに含まれる自己同型σ_aが存在する。Gの指標の値はp進数体$\mathbb{Q}_p$の代数的閉包$\overline{\mathbb{Q}}_p$に含まれるものとする。Gの指標χを$(a,p)=1$である$a\in\mathbb{Z}$に対して$\chi(a)=\chi(\sigma_a)$となる$\bmod p$のDirichlet指標χと同一視する。$(a,p)=1$となる$a\in\mathbb{Z}$に対して$\omega(\sigma_a)\equiv a \pmod p$であるような$G$の指標$\omega$が存在し$G$の指標群を生成する。$\sigma_a$を$\zeta_n^{\sigma_a}=\zeta_n^{\omega(a)}$で定まる$K_n=\mathbb{Q}(\zeta_n)$の自己同型$\sigma_a$と同一視する。

B_χをGの指標χに対する1次のBernolli数，すなわち$B_\chi=p^{-1}\sum_{a=1}^{p-1}a\chi(a)$とする。$v$を$v(p)=p^{-1}$

となる $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の付値とし，$\beta \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して $\mathrm{ord}_p(\beta)$ を $v(\beta) = p^{-\mathrm{ord}_p(\beta)}$ で定義する。ここで G の奇指標 χ に対して $e_\chi = \mathrm{ord}_p(B_{\chi^{-1}})$ と定義すれば，よく知られているように $e_\chi \in \mathbb{Z}$，$e_\omega = -1$，$\chi \neq \omega$ ならば $e_\chi \geqq 0$ である。

χ を G の指標とし $\varepsilon_\chi = \frac{1}{p-1}\sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma)\sigma$ と置く。これは G の p進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の群環 $R = \mathbb{Z}_p[G]$ に含まれる。ψを G の non-trivial な偶指標とし，$\mu_\psi = \sum_{a=1}^{p-1} m_a \sigma_a \in \mathbb{Z}[G]$ を次の様にとる：$\sum_{a=1}^{p-1} m_a = 0$ かつ十分大きな k に対して $\mu_\psi \equiv \varepsilon_\psi \pmod{p^k R}$。このとき $(1-\zeta)^{\mu_\psi}$ はK の円単数であり，$\log_p(1-\zeta)^{\mu_\psi} \equiv \frac{1}{p-1}\sum_{a \bmod p} \psi^{-1}(a) \log_p(1-\zeta^{-a}) \pmod{p^k \mathbb{Z}_p}$ が成立する，ただし $\log_p$ は p進対数関数である。ここで $d_\psi = \mathrm{ord}_p\left(\log_p(1-\zeta)^{\mu_\psi}\right)$ は k に無関係に定まる。同様に $n \geqq 1$ に対しても $d_\psi^{(n)} = \mathrm{ord}_p(\log_p(1-\zeta_n)^{\mu_\psi})$ が定義できる。

p進L関数の連続性より，G の non-trivial な偶指標 ψに対して

$$B_{\psi\omega^{-1}} \equiv \frac{\tau(\psi)}{p} \sum_{a=1}^{p} \psi^{-1}(a) \log_p(1-\zeta^{-a}) \pmod{p}$$

が成立する，ただし $\tau(\psi) = \sum_{a=1}^{p-1} \psi(a)\zeta^a$ である。

これよりすぐに $e_{\psi^{-1}\omega} \geqq 1 \Leftrightarrow d_\psi > 1$ がわかる。このような関係を深めたい。ここでは $e_{\psi^{-1}\omega}$ と $d_\psi^{(n)}$ の間に成立する関係について述べる。

§2. η を K_n の単数, $\mathfrak{b}$ を K_n のイデアルとする。$\bmod p^{n+1}$ で定まる整数 $[\eta, \mathfrak{b}]_n$ を
$\zeta_n^{[\eta, \mathfrak{b}]_n} = \left(\frac{\eta}{\mathfrak{b}}\right)_n$ で定義する。ここで $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{b}}\right)_n$ は η と $\mathfrak{b}$ に対する p^{n+1} 巾剰余記号である。さて，次の補題は Iwasawa [2] の結果の類似である。

補題1. $\mathfrak{a}$ を K のイデアルで，ある整数 $k \geqq 0$ によって $\mathfrak{a}^{p^k} = (\alpha)$ となるものとする，ただし α は K の整数で $\alpha \equiv 1 \pmod{(1-\zeta)}$ を満たすものとする。ψ を G の non-trivial な偶指標とし $\chi = \psi^{-1}\omega$ と置く。
$u \in \mathbb{Q}_p$ を $\varepsilon_\chi(\log_p \alpha) = u\,\tau(\chi^{-1})$ で定義する。
このとき $n \geqq 1$ に対して

$$[(1-\zeta_n)^{\mu_\psi}, \mathfrak{a}]_n \equiv -\frac{u B_{\chi^{-1}}}{p^k} \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}$$

が成立する。

（証明） 次の変形が成立する。

$$\left(\frac{(1-\zeta_n)^{\mu_\psi}}{\mathfrak{a}}\right)_n = \left(\frac{(1-\zeta_{n+k})^{\mu_\psi}}{\mathfrak{a}}\right)_{n+k}^{p^k} = \left(\frac{(1-\zeta_{n+k})^{\mu_\psi}}{\alpha}\right)_{n+k}$$

ここで Artin-Hasse の定理［1］より

$$\left(\frac{1-\zeta_{n+k}}{\alpha}\right)_{n+k} = \zeta_{n+k}^{\,p^{-1}T\left(-\frac{\zeta}{1-\zeta}\log_p\alpha\right)}$$

を得る，ただし T は $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ から $\mathbb{Q}$ への trace を表わす。 これより

$$[(1-\zeta_n)^{\mu_\psi}, \mathfrak{a}]_n \equiv \frac{1}{p^k}[(1-\zeta_{n+k})^{\mu_\psi}, \mathfrak{a}]_{n+k} \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}$$

$$\equiv \frac{1}{p^{k+1}}T\left(\varepsilon_{\psi\bar{\omega}}\left(-\frac{\zeta}{1-\zeta}\log_p\alpha\right)\right) \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}$$

が成立する。 ［2］より

$$T\left(\varepsilon_{\chi^{-1}}\left(-\frac{\zeta}{1-\zeta}\log_p\alpha\right)\right) = -upB_{\chi^{-1}}$$

であるから，これより補題を得る。

補題2． G の奇指標 χ $(\chi\neq\omega)$ に対して

$\mathrm{ord}_p\,\varepsilon_\chi(\log_p\alpha) = \mathrm{ord}_p\,\tau(\chi^{-1})$， $\alpha\equiv 1 \pmod{(1-\zeta)}$

を満たす K の整数 α が存在する。

（証明） 任意の $\sigma \in G$ について $\sigma(\pi) = \omega(a)\pi$ であり，$ord_p \pi = \frac{1}{p-1}$ となる $\pi \in \mathbb{Q}_p(\zeta)$ が存在する。$\chi = \omega^i$，$3 \leqq i \leqq p-2$ と置けば $ord_p(\tau(\chi^{-1})) = \frac{i}{p-1}$ である。ここで K の整数 α を $\alpha \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \pi^{ik} \pmod{p\mathbb{Z}_p[\zeta]}$ となるようにとれば

$$\varepsilon_{\omega^i}(\log_p \alpha) \equiv \sum_{a=1}^{p-1} \omega^{-i}(a)\, \sigma_a(\pi^i) \pmod{p\mathbb{Z}_p[\zeta]}$$

$$\equiv -\pi^i \pmod{p\mathbb{Z}_p[\zeta]}。$$

これより補題を得る。

定理、 n を正整数，ψ を G の non-trivial な偶指標とするとき，もし $d_\psi^{(n)} > n+1$ ならば $e_{\psi^{-1}\omega} \geqq n+1$ である。

（証明） $ord_p((1-\zeta_n)^{\mu_\psi}) > n+1$ であるならば，Kummer 拡大の理論より $K_n(((1-\zeta_n)^{\mu_\psi})^{\frac{1}{p^{n+1}}})$ は K_n 上不分岐な拡大であり，よって K の整数 α に対して

$$\left(\frac{(1-\zeta_n)^{\mu_\psi}}{\alpha}\right)_n = 1$$

である。 α として特に補題2の条件を満たすようにとれ

ば，補題1より

$$u B_{\psi\omega^{-1}} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}$$

が成立する。今の場合 $\mathrm{ord}_p u = 0$ であるから $e_{\psi^{-1}\omega} \geq n+1$ を得る。

参考文献

[1] E. Artin, H. Hasse, Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der ℓ^n-ten Potenzreste im Körper der ℓ^n-ten Einheitswurzeln, Abh. Math. Sem. (Hamburg)6, 146-162(1928).

[2] K. Iwasawa, A note on cyclotomic fields, Inventiones math. 36, 115-123(1976).